Μερικές διατάξεις (ή απλά διατάξεις)

Ορισμός: Μία σχέση $\leq \subseteq E\times E$ λέγεται σχέση μερικής διάταξης ή μερική διάταξη ή διάταξη αν είναι αυτοπαθής, αντισυμμετρική κ' μεταβατική.
Συνήθως χρησιμοποιούμε το σύμβολο "$\leq$" για να συμβολίσουμε μία μερική διάταξη.

Αν $\leq$ είναι μία μερική διάταξη στο E λέμε ότι το $(E,\leq)$ είναι ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο.

Αν $(E,\leq)$ είναι ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο κ' $\alpha,\beta \in E$ αν $\alpha\leq\beta$ λέμε ότι το α προηγείται του β κ' γράφουμε επίσης $\beta\geq\alpha$.

Παρατήρηση $\leq^{-1} = \geq$

Η $\geq$ είναι επίσης μερική διάταξη στο E

Αν επίσης ορίσουμε

$\alpha<\beta \Leftrightarrow (\alpha\leq\beta$ κ' $\alpha\neq\beta)$

(δηλαδή $< \; = \; \leq - \Delta_E$)

Αν $\alpha<\beta$ λέμε ότι το α προηγείται γνήσια του β.

Ολική διάταξη (ή γραμμική διάταξη)

Ορισμός: Αν E ένα σύνολο κ' $\leq$ είναι μια μερική διάταξη στο σύνολο E, ώστε να ισχύει επιπλέον:

$\forall x,y\in E$ ισχύει $x\leq y$ ή $y\leq x$, τότε η $\leq$ λέγεται ολική διάταξη ή γραμμική διάταξη. Σε αυτήν την περίπτωση το ζεύγος $(E,\leq)$ λέγεται ολικά διατεταγμένο σύνολο ή γραμμικά διατεταγμένο σύνολο

Π.χ. (i) Στο $\mathbb{R}$ η συνήθης σχέση $\leq$ είναι ολική διάταξη (ομοίως στα $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$)

(ii) Έστω Ω τυχόν σύνολο κ' $P(\Omega)$ το δυναμοσύνολο του Ω

Η "$\subseteq$" είναι μια μερική διάταξη στο $P(\Omega)$ (εφόσον είναι αυτοπαθής, αντισυμμετρική κ' μεταβατική)

Αν το Ω έχει δύο τουλάχιστον στοιχεία η "$\subseteq$" δεν είναι γραμμική διάταξη στο $P(\Omega)$.

Πράγματι, αν $a,b\in\Omega$ με $a\neq b$. Τα $\{a\},\{b\}\in P(\Omega)$ κ' δεν ισχύει $\{a\}\subseteq\{b\}$ ούτε ισχύει $\{b\}\subseteq\{a\}$. Άρα η "$\subseteq$" δεν είναι γραμμική διάταξη.

(iii) Στο σύνολο $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5\ldots\}$ των φυσικών αριθμών.

Ορίζουμε τη σχέση σ ως εξής $\sigma=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : x \text{ διαιρεί τον } y\}$

$\Updownarrow$

$\exists k\in\mathbb{N}\ y=kx$

σ αυτοπαθής (διότι $y,x\in\mathbb{N}$ $x=1\cdot x$ με $1\in\mathbb{N}$ άρα $(x,x)\in\sigma$)

σ αντισυμμετρική (Αν $x\sigma y$ κ' $y\sigma x$ τότε $\exists k\in\mathbb{N}$ $y=kx$ $\exists\lambda\in\mathbb{N}$ $x=\lambda y$

Άρα $x=k\lambda x \xrightarrow{x\neq 0} k\lambda=1 \xrightarrow{k,\lambda\in\mathbb{N}} k=\lambda=1$.

Άρα $x=y$)

σ μεταβατική Αν $x\sigma y$ κ' $y\sigma z$ $\exists k\in\mathbb{N}$ $y=kx$ $\exists\lambda\in\mathbb{N}$ $z=\lambda y$

$z\overset{!!}{=}k\lambda x \in\mathbb{N}$

Ως γινόμενο δύο φυσικών. Άρα $x \leq 2$.

Η $\leq$ είναι μερική διάταξη.

Η $\leq$ δεν είναι ολική διάταξη αφού π.χ. $2 \not\leq 3$ κ' $3 \not\leq 2$